|  |
| --- |
| УДК 517.518.8 |
|  |
| С.М. СИТНИК, Э.Л.ШИШКИНАS.M.SITNIK, E.L. SHISHKINA |
|  |
| **КВАДРАТИЧНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ** **С ПРИЛОЖЕНИЯМИ В ТЕОРИИ СИГНАЛОВ****Quadratical Fourier transform** **with applications in signal theory** |
|  |
| *Рассматриваются аппроксимации сигналов при помощи целочисленных сдвигов функций Гаусса – квадратичных экспонент. Предложен метод нахождения узловой функции для данной задачи интерполяции, основанный на решениях усечённых систем линейных уравнений.**Ключевые слова: интерполяция; функции Гаусса; узловые функции; тета-функции Якоби;цифровые сигналы.* |
|  |
| *Approximations of signals are considered by integer shifts of the Gauss functions-quadratic exponentials. A new method is proposed for finding nod function for this problem which is based on solutions of cut systems of linear equations.**Keywords: interpolation, Gauss functions, nod functions, Jacobi theta-functions, digital signals.* |
|  |
| Изучим задачу о приближении сигналов произвольной природы (электрических, информационных и т.д.) в виде ряда по системе целочисленных сдвигов функции Гаусса (квадратичной экспоненты с параметрами). Для численного анализа и приложений основную роль играют приближения данного типа конечными суммами, которые возникают при усечении соответствующих рядов. Исследованию таких конечных приближений и посвящена данная работа. Историю вопроса, основные результаты и многочисленные приложения см. в [1-3].Более точно, будет исследована следующая основная задача: рассмотрим произвольную функцию $f\left(x\right)$, заданную на всей оси $x \in R$$x \in R$ и некоторый параметр $σ>0$$σ>0$, который в приложениях играет роль среднеквадратичного отклонения. Будем искать интерполирующую функцию $\tilde{f}(x)$, так же определённую на всей оси$ x \in R$$ x \in R$, которая представляется в виде ряда по целочисленным сдвигам функции Гаусса

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | $$\tilde{f}\left(x\right)\~\sum\_{k=-\infty }^{\infty }f\_{k}e^{-\frac{\left(x-k\right)^{2}}{2σ^{2}}}$$ | (1) |

и совпадает с исходной функцией во всех целых точках $f\left(m\right)=\tilde{f}\left(m\right), m ϵ Z.$ (2)Известны два подхода к решению поставленной задачи. При первом подходе решение ищется с помощью специальных функций, а именно тета-функций Якоби. Как показано в [1], несмотря на теоретическую ценность этого подхода, он не имеет вычислительных перспектив, так как связан с делением на чрезвычайно малые знаменатели. Другой подход разрабатывался в [2-3], он основан на применении дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Такой подход имеет определённую вычислительную ценность, но она достигается ценой существенного усложнения алгоритма, при этом вычисления возможны в достаточно узких диапазонах параметров и с небольшим числом разрядов в результатах. Поэтому в настоящей работе предлагается наиболее простой прямой метод решения поставленной задачи, основанный на сведении её к решению конечных систем линейных уравнений, см. также [4-5]. Существенным препятствием для развития этого метода являлось отсутствие результатов по доказательству однозначной разрешимости соответствующих систем линейных уравнений. В настоящей работе получены результаты, устанавливающие требуемую однозначную разрешимость линейных систем. Эти результаты являются теоретическим обоснованием для разработки практических численных алгоритмов, избавленных от необходимости работы со специальными функциями или ДПФ.В работе получено теоретическое обоснование корректной разрешимости основной системы линейных уравнений для конечномерного приближения бесконечной системы, а также проведён достаточно существенный объём компьютерных вычислений. Приведём список основных полученных результатов (см. также [4-14]).1. Доказано, что при всех допустимых значениях параметров $q,σ$ исследуемые конечномерные системы линейных уравнений имеют единственное решение.2. Проведено компьютерное исследование решений полученных конечномерных систем линейных уравнений численными методами при помощи математического пакета MATHEMATICA при широком наборе управляющих параметров *q, σ*.3. Рассмотрено разложение указанным методом по целочисленным сдвигам функции Гаусса основного набора стандартных электрических сигналов: переключательных режимов, кусочно-постоянных, прямоугольных, треугольных, сложной формы, включая различные нерегулярные меандры. **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**1. Журавлёв М.В., Киселёв Е.А., Минин Л.А., Ситник С.М. Тета-функции Якоби и системы целочисленных сдвигов функций Гаусса // Современная математика и её приложения. Т. 67. Уравнения в частных производных.- 2010. - С. 107-116.
2. Минин Л.А., Ситник С.М., Журавлев М.В. О вычислительных особенностях интерполяции с помощью целочисленных сдвигов гауссовых функций // Научные ведомости Белгородского государственного университета.- 2009.- № 13 (68), 17/2. -С. 89-99.
3. Zhuravlev M.V., Kiselev E. A., Minin L. A., S. M. Sitnik. Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions // Journal of Mathematical Sciences, Springer.- 2011, Vol. 173, № 2. - pp. 231-241.
4. Ситник С.М., Тимашов А.С. Расчёт конечномерной математической модели в задаче квадратичной экспоненциальной интерполяции // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика, Физика.-2013.- №19 (162). Вып. 32.- С. 184-186.
5. Ситник С.М., Тимашов А.С., Ушаков С.Н. Метод конечномерных приближений в задачах квадратичной экспоненциальной интерполяции. Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика. 2015, № 17 (214), вып. 40, С. 130-142.
6. Минин Л.А., Ситник С.М., Ушаков С.Н. Поведение коэффициентов узловых функций, построенных из равномерных сдвигов функций Гаусса и Лоренца//Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика, Физика. 2014, №7 (183), Выпуск 35, С. 214-217.
7. Киселев Е.А., Минин Л.А., Новиков И. Я., Ситник С. М. О константах Рисса для некоторых систем целочисленных сдвигов// Математические заметки. 2014, Том 96, выпуск 2, С. 239-250.

10. E.A. Kiselev, L.A. Minin, I.Ya. Novikov, S.M. Sitnik. On the Riesz Constants for Systems of Integer Translates. Mathematical Notes. Springer. 2014, Vol. 96 (1-2), P. 228-238.**Ситник Сергей Михайлович**Белгородский государственный национальный исследовательский университет «БелГУ», г. БелгородД.ф.-м.н., профессор кафедры «Дифференциальные уравнения»Тел.: +7 (4722) 30-12-13E-mail: sitnik@bsu.edu.ru |